

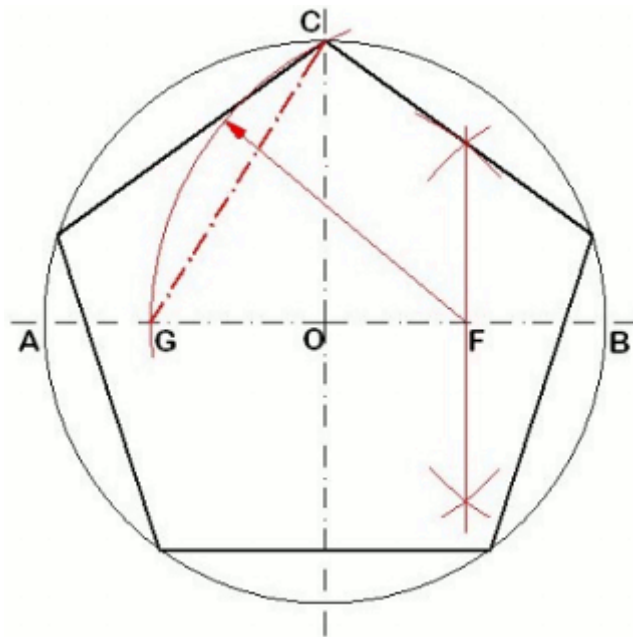
A szabályos ötszög szerkesztéséhez

Tanuljuk a síkmértani szerkesztéseknél, hogyan kell szabályos ötszöget szerkeszteni.

Nem kérdezzük, hogy miért – csak.

Aztán egyszer eszünkbe jut, hogy valahogyan mégiscsak meg kellene győződni róla, hogy tényleg jó - e ez a szerkesztés. Persze, a szerkesztés elvégzése után lemérhetjük a közép - ponti szögeket, az oldalak hosszát, és megállapíthatjuk, hogy az tényleg működik.

Most egy másik lehetőséget vizsgálunk meg: egy számításosat. Ehhez először nézzük meg, hogyan alakul a szerkesztés – 1. ábra!



- Rajzoljunk egy kört egymásra merőleges átmérőkkel!
- Az OB sugár felezésével kapjuk az F pontot.
- Az FC szakasz hosszával körívet rajzolunk az F pontból. Ez a körív a vízszintes átmérőt a G pontban metszi.
- A kapott CG szakasz hossza lesz az ötszög egy oldalának a hossza.
- Jelöljük ki a körön egy pontot, s innen kezdve a CG szakasz hosszával sorra egymás után messük el a körívet. A kapott metszéspontok lesznek az ötszög csúcsai.

1. ábra – forrása: http://trafo01.uw.hu/10F1_mabr/04_mabr.html

Ezután számítsuk ki az r sugarú körbe írt szabályos ötszög egy oldalának az a hosszát!

Először meghatározzuk az FC távolságot, Pitagorász - tétellel:

$$\overline{FC}^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2 = \frac{5}{4} \cdot r^2 \rightarrow \overline{FC} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot r. \quad (1)$$

Majd ismét Pitagorász - tétellel a $GC = a$ távolságra:

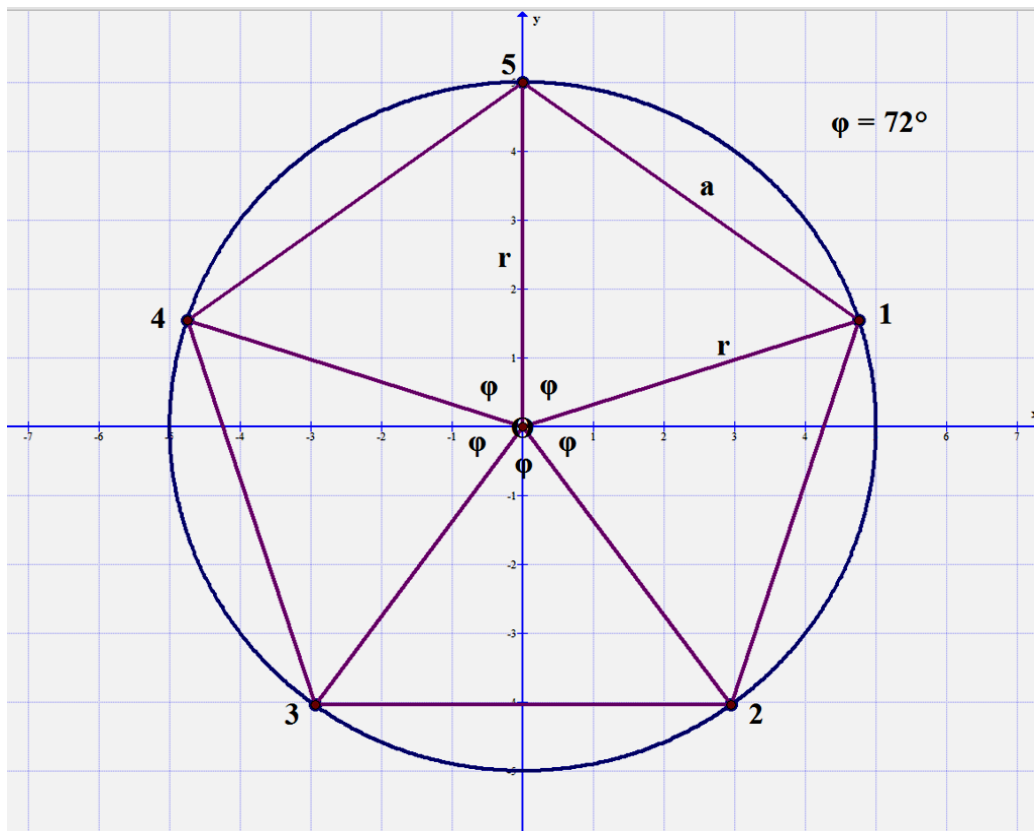
$$\overline{GC}^2 = (\overline{GF} - \overline{OF})^2 + \overline{OC}^2 = (\overline{FC} - \overline{OF})^2 + \overline{OC}^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot r - \frac{r}{2}\right)^2 + r^2 =$$

$$= \left[\frac{r}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1) \right]^2 + r^2 = r^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2 \right],$$

azaz:

$$\underline{a = r \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2}}. \quad (2)$$

A (2) képlet a szerkesztési előírás alapján előálló helyzetnek megfelelően készült.
Most számítsuk ki az **a** oldal hosszát a 2. ábra alapján!



2. ábra

Eszerint, az **5O1** háromszögből, koszinusz - tétellel:

$$a^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos \varphi,$$

$$a^2 = 2 \cdot r^2 - 2 \cdot r^2 \cdot \cos \varphi = 2 \cdot r^2 \cdot (1 - \cos \varphi), \text{ innen:}$$

$$a = r \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \cos \varphi)}. \quad (3)$$

Általában a szabályos **n** - szögekre:

$$\varphi = \frac{360^\circ}{n}, \quad (4)$$

így a szabályos n - szög oldalhossza (3) és (4) szerint:

$$\underline{a = r \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 - \cos \frac{360^\circ}{n}\right)}}. \quad (5)$$

Ezt $n = 5$ - re alkalmazva:

$$a = r \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \cos 72^\circ)}. \quad (6)$$

Azt várhatjuk, hogy (2) és (6) ugyanazt az eredményt adja, így igazolva a szerkesztés helyességét. És valóban, mivel

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot (1 - \cos 72^\circ)} = 1,175570505, \quad (7)$$

így az a oldal hosszának kétféle kiszámításán keresztül a szerkesztés helyességét is igazoltuk. Emellett megkaptuk, hogy a szabályos ötszög egy oldalának hossza és az ötszög köré írt kör sugara közti számszerű összefüggés:

$$\underline{a = 1,175570505 \cdot r}, \quad (8)$$

illetve:

$$\underline{r = 0,8506508081 \cdot a}. \quad (9)$$

Ez gyakorlatilag is hasznosítható:

~ adott r , keresett a : a (8) képletet alkalmazzuk;

~ adott a , keresett r : a (9) képletet alkalmazzuk.

Megjegyezzük, hogy a fentiek csak arról szólnak, hogy hogyan lehet belátni, hogy egy szabályos ötszöget az 1. ábrán megadott módon is meg lehet szerkeszteni. Arról azonban nem esik szó, hogy hogyan lehet kitalálni egy ilyen szerkesztést.

Ezzel mondandónkat elmondtuk.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
mérnöktanár

Sződliget, 2015. 11. 21.